Mécanique - Chapitre 1 : Oscillateurs harmoniques

Ce qu'il faut retenir…

OSCILLATEUR HARMONIQUE NON AMORTI :

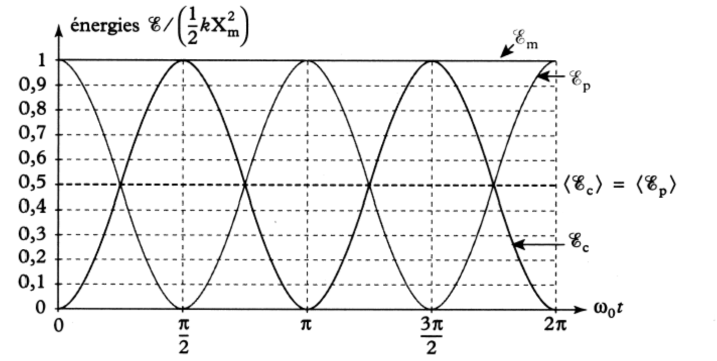
Equation différentielle :

Un oscillateur harmonique à un degré de liberté x (position, angle, tension…) est un système physique dont l'´evolution au cours du temps en l'absence d'amortissement et d'excitation, est régie par l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}}$$

ω_0 est la pulsation propre et x_{eq} la valeur du paramètre x à l'équilibre.

En mécanique, cette équation s'établit en écrivant la conservation de l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p = Cte$ ou en projetant le PFD.
L'énergie cinétique est $E_C = \frac{1}{2} mv^2$, E_p est l'énergie potentielle.



Énergies cinétique, potentielle et mécanique de l'oscillateur harmonique ($\varphi = 0$).

Il y a conversion d'énergie cinétique en énergie potentielle et inversement.
Exemples : point matériel élastiquement lié ou pendule dans l'approximation des petits angles en l'absence de frottements.

En électrocinétique : elle s'établit par application des lois de Kirchhoff.
Exemple : circuit LC

Solution générale :

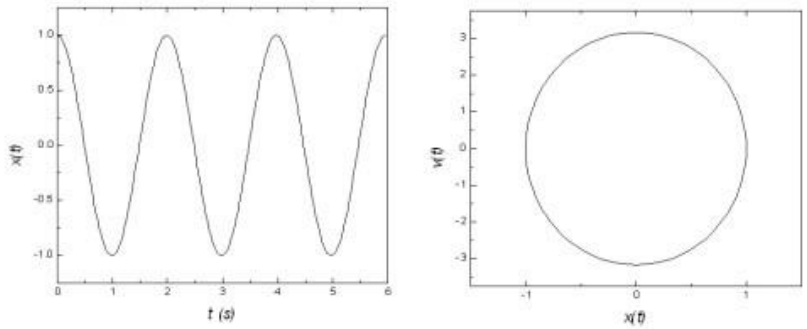
$\boxed{x(t) = x_{eq} + x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$ ou $\boxed{x(t) = x_{eq} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$

La pulsation propre ω_0 correspond donc à la pulsation du mouvement en l'absence d'amortissement.

x_m est l'amplitude ($x_m = \sqrt{A^2 + B^2}$),
φ la phase à l'origine des temps ($\tan\varphi = -B/A$).
x_m et φ ou A et B se déterminent avec les CI…

Portrait de phase :

On trace $\dot{x}(x)$ Le portrait de phase est une ellipse centrée sur la valeur x_{eq}.



OSCILLATEUR HARMONIQUE AMORTI :

Equation différentielle :

En l'absence d'excitation, un oscillateur harmonique amorti à un degré de liberté x (position, angle…) est un système physique dont l'´evolution au cours du temps, est régie par l'équation différentielle linéaire :

$$\boxed{\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2 x=\omega_0^2 x_{eq}}$$

ω_0 est la pulsation propre, Q est **le facteur de qualité**, x_{eq} est la position d'équilibre.
On pourrait aussi poser τ le temps caractéristique qui traduit la décroissance en amplitude telle que $\frac{2}{\tau}=\frac{\omega_0}{Q}$.

Exemple en mécanique : point matériel de masse m relié à un ressort de raideur k et soumis à une force de frottement fluide $\vec{f}=-\alpha\vec{v}=-\alpha\dot{x}\vec{u}_x$.

Exemple en électrocinétique : circuit RLC

Régimes : il dépend du signe du discriminant de l'équation caractéristique :

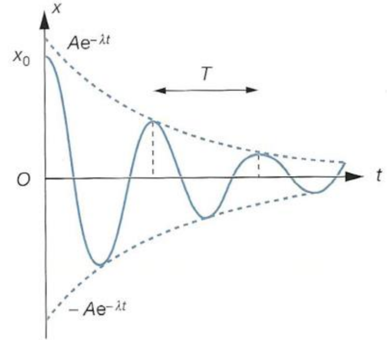
$$\Delta=4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2}-1\right)$$ et donc de Q.

- **Régime pseudopériodique** : $\Delta<0 \leftrightarrow$ **Q > ½**

L'équation caractéristique admet 2 racines complexes de partie réelle $=-\frac{\omega_0}{2Q}$ et de partie imaginaire $\pm\Omega\ avec\ \Omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{\tau^2}}=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$

Solution générale : $x(t)=x_{eq}+\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left(A\cos(\Omega t)+B\sin(\Omega t)\right)$

x(t) est 1 fonction cosinus modulée par une enveloppe exponentielle décroissante. Ω est la pseudo-pulsation, c'est la pulsation des oscillations amorties.



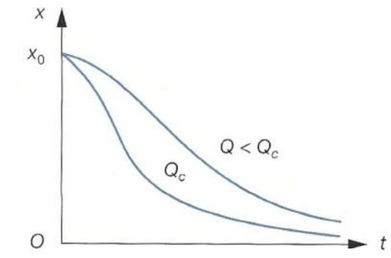
Plus Q est grand, moins le système est amorti.

Dans ce cas, la durée du phénomène ≈ QT≈ 3τ., T est la pseudo période.
Q donne une estimation du nombre d'oscillations.

- **Régime apériodique** : $\Delta>0 \leftrightarrow$ **Q < ½**

L'équation caractéristique admet 2 racines réelles r_1 et r_2…

Solution générale :
$x(t)=x_{eq}+A\exp(r_1t)+B\exp(r_2t)$



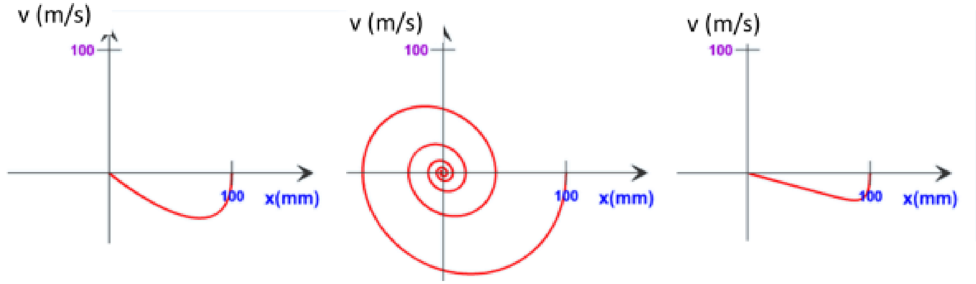
x_{eq}=0

- **Régime apériodique critique** : $\Delta=0 \leftrightarrow$ **Q_c = ½**

L'équation caractéristique admet 1 racine double r $=-\frac{\omega_0}{2Q}$ (amortissement le plus rapide)

Solution générale : $x(t)=x_{eq}+(A+Bt)\exp\left(\frac{-\omega_0}{2Q}t\right)$

Portraits de phase : pour x_{eq} =0 et v(0)=0



Apériodique Pseudopériodique Apériodique critique